

۱. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow R$ و $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ -1 & x \notin Q \end{cases}$ برای هر افزایش دلخواه P و هر تابع صعودی α ، کدام گزینه نادرست است؟

الف: $L(p, f, \alpha) = \alpha(a) - \alpha(b)$ ب: $U(p, f, \alpha) = \alpha(b) - \alpha(a)$

ج: $f \notin R(\alpha)$ د: $U(p, f, \alpha) = L(p, f, \alpha)$

۲. $\int_a^b f d\alpha$ در کدام حالت همیشه وجود دارد؟

الف: α کراندار و f دلخواه ب: α دلخواه و f کراندار ج: α صعودی و f کراندار د: α صعودی و f پیوسته

۳. اگر $f(x) = e^x$ باشد مقدار عددی $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}}$ ، $(0 < a < b)$ کدام گزینه است؟

الف: e^a ب: e^b ج: 0 د: لزوماً وجود ندارد

۴. مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + k^2}$ کدام گزینه است؟

الف: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ ب: $\int_0^1 \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} dx$ ج: $\int_1^2 \frac{1}{1+x^2} dx$ د: $\int_0^1 \frac{n}{x^2+n^2} dx$

۵. کدام تابع بر بازه $[0, 1]$ انتگرال پذیر است؟

الف: $f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n}, n \in N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ ب: $f(x) = \begin{cases} 4 & x \in Q \\ 3-x & x \notin Q \end{cases}$ ج: $f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{m}{n}, (m, n) = 1 \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ د: $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \notin Q \\ 0 & x \in Q \end{cases}$

۶. مقدار $\int_0^4 e^x dx + \int_0^4 x d(e^x)$ برابر است با؟

الف: $-e^4$ ب: $4e^4$ ج: $4e^4 - 1$ د: وجود ندارد

۷. اگر تابع f بر $[a, b]$ پیوسته و اکیدا صعودی باشد و $f(a) = A$ و $f(b) = B$ باشد آنگاه $\int_a^b f(x) dx + \int_A^B f^{-1}(x) dx$ برابر با

الف: $aA - bB$ ب: $aB - bA$ ج: $Ab - Ba$ د: $bB - aA$

۸. حاصل انتگرال $\int_0^4 x^2 + 1 d([x])$ کدام است؟

الف: ۱۷ ب: ۳۰ ج: ۳۴ د: وجود ندارد

۹. فرض کنید $f \in R$ بر $[a, b]$ و برای هر $x \in [a, b]$ ، $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ اگر $x_0 \in [a, b]$ باشد آنگاه؟

الف: F در x_0 مشتق پذیر است و $F'(x_0) = f(x_0)$

ب: اگر f در x_0 پیوسته باشد آنگاه $F'(x_0) = f(x_0)$

ج: اگر f در x_0 مشتق پذیر باشد آنگاه $F(x_0) = f'(x_0)$

د: اگر f در x_0 حد داشته باشد آنگاه $F'(x_0) = f(x_0)$

۱۰. در بازه $[a, b]$ کدام گزینه با بقیه معادل نیست؟

الف: $\int_a^b f d\alpha \neq \int_a^b f d\alpha$ ب: $\exists \epsilon > 0 \forall p_\epsilon \exists P(p_\epsilon \subseteq P \wedge U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq \epsilon)$

ج: f در بعضی نقاط از $[a, b]$ ناپیوسته است. د: $f \notin R(\alpha)$

۱۱. اگر $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ و $g(x) = \int_0^{\cos x} 1 + \sin^2 t dt$ باشند آنگاه $f'(\frac{\pi}{2})$ کدام گزینه است؟

الف: $-\sqrt{2}$ ب: ۱ ج: -۱ د: $\sqrt{2}$

۱۲. فرض کنید توابع f و g نسبت به تابع صعودی α بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر باشند. کدام گزینه همواره صحیح می باشد؟

الف: $fog \in R(\alpha)$ ب: $fog \in R(\alpha)$ و $fof \in R(\alpha)$ ج: $g \neq 0, \frac{f}{g} \in R(\alpha)$ د: $f^2g \in R(\alpha)$

۱۳. کدام یک از انتگرال های زیر به طور مطلق همگراست؟

الف: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx$ ب: $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x)} dx$ ج: $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ د: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

۱۴. حاصل انتگرال $\int_2^{\infty} \frac{2}{x^5} dx$ کدام گزینه است؟

الف: $\frac{1}{64}$ ب: $\frac{1}{32}$ ج: $\frac{1}{64}$ د: $\frac{1}{32}$

۱۵. مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ برابر کدام گزینه است؟

الف: $\frac{\pi}{2}$ ب: π ج: $\frac{\pi^2}{4}$ د: $\frac{\pi}{4}$

۱۶. اگر برای هر عدد حقیقی $T > a$ تابع f بر بازه $[a, T]$ انتگرال پذیر باشند آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه $\int_a^T f$ موجود باشد آن است که

الف: $\forall \varepsilon > 0 \forall T_0 \exists T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \rightarrow |\int_{T_1}^{T_2} f| < \varepsilon$ ب: $\forall \varepsilon > 0 \forall T_0 \forall T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \rightarrow |\int_{T_1}^{T_2} f| < \varepsilon$

ج: $\forall \varepsilon > 0 \exists T_0 \forall T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \rightarrow |\int_{T_1}^{T_2} f| < \varepsilon$ د: $\exists \varepsilon > 0 \forall T_0 \exists T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \rightarrow |\int_{T_1}^{T_2} f| < \varepsilon$

۱۷. فرض کنید تابع f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار نباشد. کدام گزاره منطقی درست است؟

الف: $\exists M \forall P (\sum P \leq M)$ ب: $\forall M \exists P (\sum P > M)$ ج: $\exists M \forall P (\sum P > M)$ د: $\forall M \exists P (\sum P \leq M)$

۱۸. کدام یک از گزینه های زیر در مورد تابع f بر $[a, b]$ درست باشد؟

الف: اگر f مشتق پذیر باشد آنگاه با تغییر کراندار است. ب: اگر f با تغییر کراندار باشد آنگاه f کراندار است.

ج: اگر f کراندار باشد آنگاه f با تغییر کراندار است. د: اگر f انتگرال پذیر باشد آنگاه با تغییر کراندار است.

۱۹. با کدام شرط تابع f الزاما روی $[a, b]$ با تغییر کراندار نیست؟

الف: f' پیوسته باشد. ب: f صعودی باشد. ج: f نزولی باشد. د: f پیوسته یکنواخت باشد.

۲۰. کدام یک از توابع زیر بر بازه $[0, 1]$ با تغییر کراندار نیست؟

الف: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ب: $f(x) = x^3 + 1$ ج: $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ د: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

۲۱. اگر f یک تابع با مشتق پیوسته بر $[a, b]$ باشد آنگاه در مورد e^f کدام گزینه بر این بازه ممکن است درست نباشد؟

الف: با تغییر کراندار است. ب: کراندار است. ج: صعودی است. د: مشتق پذیر است.

۲۲. اگر X یک فضای متریک باشد و $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع روی X باشد به طوری که نقطه به نقطه به تابع پیوسته f همگرا باشد آنگاه با حداقل کدام

یک از شرایط زیر می توان مطمئن شد که این همگرایی یکنواخت است؟

الف: X فشرده و هر عضو دنباله $\{f_n\}$ پیوسته باشد.

ب: X فشرده و برای هر $x \in X$ و هر $n \in N$ داشته باشیم: $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$

ج: X فشرده، هر عضو دنباله $\{f_n\}$ پیوسته و برای هر $x \in X$ و هر $n \in N$ داشته باشیم: $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$

د: هر عضو دنباله $\{f_n\}$ پیوسته و برای هر $x \in X$ و هر $n \in N$ داشته باشیم: $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$

۲۳. کدام گزینه در مورد دنباله توابع $f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$ بر اعداد حقیقی درست است؟

- الف: نقطه به نقطه به $f(x) = x$ همگراست.
 ب: نقطه به نقطه به $f(x) = x^2$ همگراست.
 ج: به طور یکنواخت به $f(x) = x$ همگراست.
 د: به طور یکنواخت به $f(x) = x^2$ همگراست.

۲۴. کدام گزینه در مورد $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ درست است؟

- الف: اگر $\alpha > 1$ باشد آنگاه سری به طور یکنواخت همگراست.
 ب: اگر $\alpha \geq 1$ باشد آنگاه سری به طور یکنواخت همگراست.
 ج: اگر $\alpha \leq 1$ باشد آنگاه سری به طور یکنواخت همگراست.
 د: اگر $\alpha < 1$ باشد آنگاه سری به طور یکنواخت همگراست.

۲۵. کدام یک از شروط زیر در همگرایی یکنواخت سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ به کمک آزمون آبل کاربرد ندارد؟

- الف: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ به طور یکنواخت همگراست. ب: دنباله $\{g_n\}$ به طور یکنواخت کراندار است. ج: دنباله $\{g_n\}$ صعودی است. د: $g_n \Rightarrow 0$

۲۶. کدام گزینه بر بازه $[0, \infty)$ نادرست می باشد؟

- الف: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$ به طور یکنواخت همگراست اما به طور مطلق همگرا نمی باشد. ب: برای دنباله $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2 x^2}$ ، $f'_n \Rightarrow 0$.

ج: $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2 x^\alpha}$ برای $1 \leq \alpha < 2$ همگرای یکنواخت است. د: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ بر هر زیربازه $(\delta > 0)[\delta, 2\pi - \delta]$ همگرای یکنواخت است.

۲۷. در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ کدام گزینه صحیح تر است؟

- الف: به طور یکنواخت همگراست. ب: همگراست. ج: به طور مطلق و یکنواخت همگراست. د: به طور مطلق همگراست.

۲۸. در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(nx)}$ کدام گزینه درست است؟

- الف: واگراست. ب: همگرای مشروط است و حد آن پیوسته نیست. ج: همگرای یکنواخت است. د: فقط به طور نقطه ای همگراست.

۲۹. نقیض عبارت $f_n \Rightarrow f$ کدام گزینه است؟

- الف: $\exists \epsilon \forall N \exists n \exists x (n \geq N, x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$
 ب: $\exists \epsilon \forall N \exists n \exists x (n \geq N, x \in E, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon)$
 ج: $\forall \epsilon \exists N \forall n \forall x (n \geq N, x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$
 د: $\forall \epsilon \exists N \forall n \forall x (n \geq N, x \in E, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon)$

۳۰. با فرض اینکه $f_n \Rightarrow f$ و $g_n \Rightarrow g$ کدام یک از دنباله‌های زیر همگرای یکنواخت است؟

- الف: $f_n + g_n$ ب: $f_n \cdot g_n$ ج: $\frac{f_n}{g_n}$ د: $g(f_n)$

سوال	الف	ب	ج	د	سوال	الف	ب	ج	د	سوال	الف	ب	ج	د
۱					۱۱					۲۱				
۲					۱۲					۲۲				
۳					۱۳					۲۳				
۴					۱۴					۲۴				
۵					۱۵					۲۵				
۶					۱۶					۲۶				
۷					۱۷					۲۷				
۸					۱۸					۲۸				
۹					۱۹					۲۹				
۱۰					۲۰					۳۰				