

۱. فرض کنید  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  و  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  برای هر افزایش دلخواه  $P$  و هر تابع صعودی  $\alpha$ ، کدام گزینه نادرست است؟

الف:  $L(p, f, \alpha) = \alpha(a) - \alpha(b)$       ب:  $U(p, f, \alpha) = \alpha(b) - \alpha(a)$

ج:  $f \notin R(\alpha)$       د:  $U(p, f, \alpha) = L(p, f, \alpha)$

۲.  $\int_a^b f d\alpha$  در کدام حالت همیشه وجود دارد؟

الف:  $\alpha$  کراندار و  $f$  دلخواه      ب:  $\alpha$  دلخواه و  $f$  کراندار      ج:  $\alpha$  صعودی و  $f$  کراندار      د:  $\alpha$  صعودی و  $f$  پیوسته

۳. اگر  $f(x) = e^x$  باشد مقدار عددی  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}}$ ،  $(0 < a < b)$  کدام گزینه است؟

الف:  $e^a$       ب:  $e^b$       ج: 0      د: لزوماً وجود ندارد

۴. مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + k^2}$  کدام گزینه است؟

الف:  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$       ب:  $\int_0^1 \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} dx$       ج:  $\int_1^2 \frac{1}{1+x^2} dx$       د:  $\int_0^1 \frac{n}{x^2+n^2} dx$

۵. کدام تابع بر بازه  $[0, 1]$  انتگرال پذیر است؟

الف:  $f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$       ب:  $f(x) = \begin{cases} 4 & x \in \mathbb{Q} \\ 3-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$       ج:  $f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{m}{n}, (m, n) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$       د:  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

۶. مقدار  $\int_0^4 e^x dx + \int_0^4 x d(e^x)$  برابر است با؟

الف:  $-e^4$       ب:  $4e^4$       ج:  $4e^4 - 1$       د: وجود ندارد

۷. اگر تابع  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و اکیدا صعودی باشد و  $f(a) = A$  و  $f(b) = B$  باشد آنگاه  $\int_a^b f(x) dx + \int_A^B f^{-1}(x) dx$  برابر با

الف:  $aA - bB$       ب:  $aB - bA$       ج:  $Ab - Ba$       د:  $bB - aA$

۸. حاصل انتگرال  $\int_0^4 x^2 + 1 d([x])$  کدام است؟

الف: ۱۷      ب: ۳۰      ج: ۳۴      د: وجود ندارد

۹. فرض کنید  $f \in R$  بر  $[a, b]$  و برای هر  $x \in [a, b]$ ،  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ، اگر  $x_0 \in [a, b]$  باشد آنگاه؟

الف:  $F$  در  $x_0$  مشتق‌پذیر است و  $F'(x_0) = f(x_0)$

ب: اگر  $f$  در  $x_0$  پیوسته باشد آنگاه  $F'(x_0) = f(x_0)$

ج: اگر  $f$  در  $x_0$  مشتق‌پذیر باشد آنگاه  $F(x_0) = f'(x_0)$

د: اگر  $f$  در  $x_0$  حد داشته باشد آنگاه  $F'(x_0) = f(x_0)$

۱۰. در بازه  $[a, b]$  کدام گزینه با بقیه معادل نیست؟

الف:  $\int_a^b f d\alpha \neq \int_a^b f d\alpha$       ب:  $\exists \epsilon > 0 \forall p_\epsilon \exists P(p_\epsilon \subseteq P \wedge U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq \epsilon)$

ج:  $f$  در بعضی نقاط از  $[a, b]$  ناپیوسته است.      د:  $f \notin R(\alpha)$

۱۱. اگر  $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$  و  $g(x) = \int_0^{\cos x} 1 + \sin^2 t dt$  باشند آنگاه  $f'(\frac{\pi}{2})$  کدام گزینه است؟

الف:  $-\sqrt{2}$       ب: ۱      ج: -۱      د:  $\sqrt{2}$

۱۲. فرض کنید توابع  $f$  و  $g$  نسبت به تابع صعودی  $\alpha$  بر بازه  $[a, b]$  انتگرال پذیر باشند. کدام گزینه همواره صحیح می باشد؟

الف:  $fog \in R(\alpha)$       ب:  $fog \in R(\alpha)$  و  $fof \in R(\alpha)$       ج:  $g \neq 0, \frac{f}{g} \in R(\alpha)$       د:  $f^2 g \in R(\alpha)$

۱۳. کدام یک از انتگرال های زیر به طور مطلق همگراست؟

الف:  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx$       ب:  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x)} dx$       ج:  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$       د:  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

۱۴. حاصل انتگرال  $\int_2^{\infty} \frac{2}{x^5} dx$  کدام گزینه است؟

الف:  $\frac{1}{64}$       ب:  $\frac{1}{32}$       ج:  $\frac{1}{64}$       د:  $\frac{1}{32}$

۱۵. مقدار انتگرال  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  برابر کدام گزینه است؟

الف:  $\frac{\pi}{2}$       ب:  $\cdot$       ج:  $\frac{\pi^2}{4}$       د:  $\frac{\pi}{4}$

۱۶. اگر برای هر عدد حقیقی  $T > a$  تابع  $f$  بر بازه  $[a, T]$  انتگرال پذیر باشند آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه  $\int_a^T f$  موجود باشد آن است که

الف:  $\forall \varepsilon > 0 \forall T_0 \exists T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \varepsilon$       ب:  $\forall \varepsilon > 0 \forall T_0 \forall T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \varepsilon$

ج:  $\forall \varepsilon > 0 \exists T_0 \forall T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \varepsilon$       د:  $\exists \varepsilon > 0 \forall T_0 \exists T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \varepsilon$

۱۷. فرض کنید تابع  $f$  بر  $[a, b]$  با تغییر کراندار نباشد. کدام گزاره منطقی درست است؟

الف:  $\exists M \forall P (\sum P \leq M)$       ب:  $\forall M \exists P (\sum P > M)$       ج:  $\exists M \forall P (\sum P > M)$       د:  $\forall M \exists P (\sum P \leq M)$

۱۸. کدام یک از گزینه های زیر در مورد تابع  $f$  بر  $[a, b]$  درست باشد؟

الف: اگر  $f$  مشتق پذیر باشد آنگاه با تغییر کراندار است.      ب: اگر  $f$  با تغییر کراندار باشد آنگاه  $f$  کراندار است.

ج: اگر  $f$  کراندار باشد آنگاه  $f$  با تغییر کراندار است.      د: اگر  $f$  انتگرال پذیر باشد آنگاه با تغییر کراندار است.

۱۹. با کدام شرط تابع  $f$  الزاما روی  $[a, b]$  با تغییر کراندار نیست؟

الف:  $f'$  پیوسته باشد.      ب:  $f$  صعودی باشد.      ج:  $f$  نزولی باشد.      د:  $f$  پیوسته یکنواخت باشد.

۲۰. کدام یک از توابع زیر بر بازه  $[0, 1]$  با تغییر کراندار نیست؟

الف:  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$       ب:  $f(x) = x^3 + 1$       ج:  $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$       د:  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

۲۱. اگر  $f$  یک تابع با مشتق پیوسته بر  $[a, b]$  باشد آنگاه در مورد  $e^f$  کدام گزینه بر این بازه ممکن است درست نباشد؟

الف: با تغییر کراندار است.      ب: کراندار است.      ج: صعودی است.      د: مشتق پذیر است.

۲۲. اگر  $X$  یک فضای متریک باشد و  $\{f_n\}$  یک دنباله از توابع روی  $X$  باشد به طوری که نقطه به نقطه به تابع پیوسته  $f$  همگرا باشد آنگاه با حداقل کدام

یک از شرایط زیر می توان مطمئن شد که این همگرایی یکنواخت است؟

الف:  $X$  فشرده و هر عضو دنباله  $\{f_n\}$  پیوسته باشد.

ب:  $X$  فشرده و برای هر  $x \in X$  و هر  $n \in N$  داشته باشیم:  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$

ج:  $X$  فشرده، هر عضو دنباله  $\{f_n\}$  پیوسته و برای هر  $x \in X$  و هر  $n \in N$  داشته باشیم:  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$

د: هر عضو دنباله  $\{f_n\}$  پیوسته و برای هر  $x \in X$  و هر  $n \in N$  داشته باشیم:  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$

۲۳. کدام گزینه در مورد دنباله توابع  $f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$  بر اعداد حقیقی درست است؟

- الف: نقطه به نقطه به  $f(x) = x$  همگراست.  
 ب: نقطه به نقطه به  $f(x) = x^2$  همگراست.  
 ج: به طور یکنواخت به  $f(x) = x$  همگراست.  
 د: به طور یکنواخت به  $f(x) = x^2$  همگراست.

۲۴. کدام گزینه در مورد  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$  درست است؟

- الف: اگر  $\alpha > 1$  باشد آنگاه سری به طور یکنواخت همگراست.  
 ب: اگر  $\alpha \geq 1$  باشد آنگاه سری به طور یکنواخت همگراست.  
 ج: اگر  $\alpha \leq 1$  باشد آنگاه سری به طور یکنواخت همگراست.  
 د: اگر  $\alpha < 1$  باشد آنگاه سری به طور یکنواخت همگراست.

۲۵. کدام یک از شروط زیر در همگرایی یکنواخت سری  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$  به کمک آزمون آبل کاربرد ندارد؟

- الف:  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  به طور یکنواخت همگراست. ب: دنباله  $\{g_n\}$  به طور یکنواخت کراندار است. ج: دنباله  $\{g_n\}$  صعودی است. د:  $g_n \Rightarrow 0$

۲۶. کدام گزینه بر بازه  $[0, \infty)$  نادرست می باشد؟

- الف:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$  به طور یکنواخت همگراست اما به طور مطلق همگرا نمی باشد. ب: برای دنباله  $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2 x^2}$ ،  $f'_n \Rightarrow 0$ .

ج:  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2 x^\alpha}$  برای  $1 \leq \alpha < 2$  همگرای یکنواخت است. د:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$  بر هر زیربازه  $(\delta > 0)[\delta, 2\pi - \delta]$  همگرای یکنواخت است.

۲۷. در مورد سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  کدام گزینه صحیح تر است؟

- الف: به طور یکنواخت همگراست. ب: همگراست. ج: به طور مطلق و یکنواخت همگراست. د: به طور مطلق همگراست.

۲۸. در مورد سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(nx)}$  کدام گزینه درست است؟

- الف: واگراست. ب: همگرای مشروط است و حد آن پیوسته نیست. ج: همگرای یکنواخت است. د: فقط به طور نقطه ای همگراست.

۲۹. نقیض عبارت  $f_n \Rightarrow f$  کدام گزینه است؟

- الف:  $\exists \epsilon \forall N \exists n \exists x (n \geq N, x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$   
 ب:  $\exists \epsilon \forall N \exists n \exists x (n \geq N, x \in E, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon)$   
 ج:  $\forall \epsilon \exists N \forall n \forall x (n \geq N, x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$   
 د:  $\forall \epsilon \exists N \forall n \forall x (n \geq N, x \in E, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon)$

۳۰. با فرض اینکه  $f_n \Rightarrow f$  و  $g_n \Rightarrow g$  کدام یک از دنباله‌های زیر همگرای یکنواخت است؟

- الف:  $f_n + g_n$  ب:  $f_n \cdot g_n$  ج:  $\frac{f_n}{g_n}$  د:  $g(f_n)$

سوال	الف	ب	ج	د	سوال	الف	ب	ج	د	سوال	الف	ب	ج	د
۱					۱۱					۲۱				
۲					۱۲					۲۲				
۳					۱۳					۲۳				
۴					۱۴					۲۴				
۵					۱۵					۲۵				
۶					۱۶					۲۶				
۷					۱۷					۲۷				
۸					۱۸					۲۸				
۹					۱۹					۲۹				
۱۰					۲۰					۳۰				