آزمون نوبت اول

چهلمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۹۵/۶/۳

---

۱. حلقه R و عناصر خودتوان $e, f \in R$ مفروض هستند به طوری که $e + f$ خودتوان است. ثابت کنید ef هم خودتوان است. (عنصر x از حلقهٔ R را خودتوان گویند هرگاه $x^{۲} = x$).

۲. ثابت کنید تابع $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ که با ضابطهٔ $d(m,n) = \log \frac{\sqrt{mn}}{(m,n)}$ تعریف می‌شود یک متر روی $\mathbb{N}$ است. (منظور از (m,n)، بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n است.)

۳. می‌دانیم برای هر عدد طبیعی n، معادلهٔ $x^n + \cdots + x - ۱ = ۰$ دقیقاً یک ریشهٔ مثبت دارد که آن را u_n می‌نامیم. نشان دهید دنبالهٔ $\{u_n\}$ همگرا است و حد آن را محاسبه کنید.

۴. فرض کنید R یک حلقهٔ متناهی و یکدار و $U(R)$ مجموعهٔ تمام عناصر وارونپذیر آن باشد. اگر مرتبهٔ $U(R)$ و مرتبهٔ R نسبت به هم اول باشند، نشان دهید R عنصر پوچتوان ناصفر ندارد (عنصر x در R را پوچتوان گویند هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به طوری که $x^n = ۰$.)

۵. فرض کنید $P_۱$ ، ...، P_n نقاطی داخل دایره‌ای به شعاع یک باشند به طوری که برای هر نقطه مانند P روی این دایره، حاصلضرب فاصله‌های P از نقاط $P_۱$ ، ...، P_n حداکثر یک باشد. نشان دهید نقاط $P_۱$ ، ...، P_n در مرکز دایره قرار دارند .

۶. فرض کنید $f : \mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که تحدید آن به هر خط در $\mathbb{R}^{۲}$ یکنوا باشد، یعنی برای هر $a, b \in \mathbb{R}^{۲}$، تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(t) = f(ta + b)$ یکنوا است. ثابت کنید تابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و بردار v در $\mathbb{R}^{۲}$ وجود دارند که $f(x) = h(x.v)$. (منظور از $x.v$ ضرب داخلی x و v است.)