۱) حلقه R و عناصر خودتوان $e, f \in R$ مفروض هستند به طوری که $e+f$ خودتوان است. ثابت کنید ef هم خودتوان است. (عنصر x از حلقهٔ R را خودتوان گویند هرگاه $x^2 = x$).

پاسخ: چون $e+f$ خودتوان است پس $(e+f)^2 = e+f$ با بسط سمت چپ به رابطه $e+ef+fe+f = e+f$ می رسیم بنابراین $ef + fe = 0$ یا معادلاً $ef = -fe$. در نتیجه

$$ef = e^2 f = e(ef) = e(-fe) = -(ef)e = -(-fe)e = fe^2 = fe.$$

یعنی e و f باهم جابه جا می شوند پس $(ef)^2 = e^2 f^2 = ef$ یعنی ef خودتوان است.

۲) ثابت کنید تابع $d:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ که با ضابطهٔ $d(m,n)=\log\frac{\sqrt{mn}}{(m,n)}$ تعریف می‌شود یک متر روی $\mathbb{N}$ است. (منظور از (m,n)، بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n است.)

پاسخ: فرض کنید $m=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ و $n=p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}$ تجزیه m و n به حاصلضرب اعداد اول باشد، یعنی $p_1,\dots,p_k$ اعداد اول متمایز و $\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_k$ اعداد صحیح و نامنفی باشند، پس

$$\begin{aligned} d(m,n)=\log\tfrac{\sqrt{mn}}{(m,n)} &= \log\prod_{i=1}^{k} p_i^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}-\min\{\alpha_i,\beta_i\}} \\ &= \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}|\alpha_i-\beta_i|\log p_i \end{aligned}$$

اکنون از خواص قدرمطلق، هر سه ویژگی تابع متر به سادگی نتیجه می‌شود.

۳) می‌دانیم برای هر عدد طبیعی n، معادلهٔ $x^n + \cdots + x - ۱ = ۰$ دقیقاً یک ریشهٔ مثبت دارد که آن را u_n می‌نامیم. نشان دهید دنبالهٔ $\{u_n\}$ همگرا است و حد آن را محاسبه کنید.

پاسخ: قرار می دهیم $p_n(x) = x^n + \ldots + x - ۱$. باتوجه به مقادیر $p_n(۰)$ و $p_n(۱)$ نتیجه می شود که $u_n \in (۰, ۱]$. همچنین $\{u_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای اکیداً نزولی است. زیرا داریم:

$$u_{n+۱}^{n+۱} + \ldots + u_{n+۱} - ۱ = u_n^n + \cdots + u_n - ۱ = ۰$$

و با توجه به اینکه تابع $p_n(x)$ روی اعداد نامنفی اکیداً صعودی است داریم:

$$p_n(u_{n+۱}) = u_{n+۱}^n + \cdots + u_{n+۱} - ۱ < p(u_n) \Rightarrow u_{n+۱} < u_n.$$

از کرانداری و یکنوایی دنباله $\{u_n\}_{n\geq ۱}$ همگرایی این دنباله نتیجه می‌شود. به علاوه:

$$u_n^n + \cdots + u_n - ۱ = ۰ \Rightarrow \frac{u_n^{n+۱} - ۱}{u_n - ۱} = ۲ \Rightarrow u_n^{n+۱} = ۲u_n - ۱$$

با توجه به اینکه برای $n \geq ۳$ ، $u_n < u_۲ < u_۱ = ۱$ نتیجه می‌شود $\lim_{n\to+\infty} u_n^{n+۱} = ۰$ و با حد گیری از طرفین تساوی قبل به دست می آوریم:

$$\lim_{n\to+\infty} ۲u_n - ۱ = ۰ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{۱}{۲}$$

۴) فرض کنید R یک حلقهٔ متناهی و یکدار و $U(R)$ مجموعهٔ تمام عناصر وارونپذیر آن باشد. اگر مرتبهٔ $U(R)$ و مرتبهٔ R نسبت به هم اول باشند، نشان دهید R عنصر پوچتوان ناصفر ندارد (عنصر x در R را پوچتوان گویند هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به طوری که $x^n = 0$.)

راه حل اول:

کافی است نشان دهیم اگر $a^2 = 0$ آنگاه $a = 0$.

فرض کنید $a^2 = 0$ و قرار دهید $S = \{m1_R + na : m,n \in \mathbb{Z}\}$. S زیرحلقه یکدار و جابجایی R است و $(|S|,|U(S)|) = 1$. چون S جابجایی است $\mathrm{Nil(S)}$ مجموعه عناصر پوچتوان S ایده‌ال است بنابراین $|\mathrm{Nil(S)}| \mid |S|$. همچنین $1 + \mathrm{Nil(S)}$ زیرگروه $U(S)$ است در نتیجه $|1 + \mathrm{Nil(S)}| \mid |U(S)|$.

چون $|1 + \mathrm{Nil(S)}| = |\mathrm{Nil(S)}|$ و $(|S|,|U(S)|) = 1$ بنابراین $|\mathrm{Nil(S)}| = 1$ یعنی $\mathrm{Nil(S)} = \{0\}$ پس $a = 0$.

راه حل دوم:

فرض کنید $a^2 = 0$ و $a \neq 0$. فرض کنید n مرتبه جمعی a باشد یعنی $na = 0$. پس $n \neq 1$. فرض کنید p یک عامل اول n باشد. قرار دهید $b = \frac{n}{p}a$. در این صورت $b^2 = 0$ و $b \neq 0$ و $pb = 0$ بنابراین

$$(1+b)^p = 1 + pb + \text{توانهای بالاتر } b = 1$$

پس $1 + b$ یک عضو وارون‌پذیر مرتبه p در $U(R)$ است پس $p \mid |U(R)|$. همچنین طبق فرض $p \mid |R|$ که تناقض است.

۵) فرض کنید P_1 ، ...، P_n نقاطی داخل دایره‌ای به شعاع یک باشند به طوری که برای هر نقطه مانند P روی این دایره، حاصلضرب فاصله‌های P از نقاط P_1 ، ...، P_n حداکثر یک باشد. نشان دهید نقاط P_1 ، ...، P_n در مرکز دایره قرار دارند .

پاسخ: بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم دایره در صفحهٔ مختلط و به مرکز مبدأ مختصات است. نظیر نقاط P_1 ، ...، P_n در صفحهٔ مختلط را با z_1 ، ...، z_n نمایش داده و قرار می دهیم $g(z) = \Pi_{i=1}^{n}(z - z_i)$. ادعا می کنیم حداقل یکی از مقادیر z_i برابر با صفر است. فرض کنید چنین نباشد در این صورت جملهٔ ثابت چندجمله ای $g(z)$ غیر صفر است.

این جملهٔ ثابت برابر است با $\alpha := (-1)^n z_1 \cdots z_n$. با یک دوران می توانیم فرض کنیم که قسمت حقیقی α مثبت است.

حال فرض کنید $w_1, \ldots, w_n$ ریشه‌های n ام واحد باشند. برای $0 \leq k \leq n$ داریم:

$$w_1^k + w_2^k + \cdots + w_n^k = \begin{cases} n & k = 0 \text{ یا } n \\ 0 & 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

با جاگذاری w_iها در چندجمله‌ای $g(z)$ و جمع زدن این مقادیر خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} g(w_i) = n + n\alpha$$

حال از فرض مسئله بدست می‌آوریم:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} g(w_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} | g(w_i) | \leq n$$

لذا $|n + n\alpha| \leq n$ که با فرض اینکه قسمت حقیقی α مثبت است در تناقض است در نتیجه حداقل یکی از z_iها برابر با صفر است.

با حذف این نقطه همچنان شرط سوال برای بقیهٔ نقاط برابر است بنابراین با تکرار این استدلال نتیجه می‌شودکه همه z_iها برابر با صفر هستند.

۶) فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که تحدید آن به هر خط در $\mathbb{R}^2$ یکنوا باشد، یعنی برای هر $a,b\in\mathbb{R}^2$، تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(t)=f(ta+b)$ یکنوا است. ثابت کنید تابع $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و بردار v در $\mathbb{R}^2$ وجود دارند که $f(x)=h(x.v)$. (منظور از $x.v$ ضرب داخلی x و v است.)

پاسخ: برای هر $a,b\in\mathbb{R}^2$، تابع $g_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت $g_{a,b}(t)=f(ta+b)$ تعریف می‌کنیم.

لم ۱. برای هر $x_\circ\in\mathbb{R}^2$، حداقل یک $u\in\mathbb{R}^2$ وجود دارد به طوری که تابع $g_{u,x_\circ}$ تابع ثابت است (یعنی از هر نقطه در صفحه خطی می‌گذرد که تحدید f به آن تابع ثابت است).

اثبات لم ۱. تعریف می‌کنیم

$$A=\{u\in\mathbb{R}^2 : u\neq\circ, g_{u,x_\circ}\ \text{صعودی است}\}$$

$$B=\{u\in\mathbb{R}^2 : u\neq\circ, g_{u,x_\circ}\ \text{نزولی است}\}$$

ادعا می‌کنیم $A\cap B\neq\emptyset$. فرض کنیم این طور نباشد، یعنی $A\cap B=\emptyset$. حال طبق فرض مسأله، $A\cup B=\mathbb{R}^2-\{\circ\}$. از طرفی به دلیل پیوستگی f، A و B بسته هستند چون اگر مثلاً $u_n\in A$ و $u_n\to u$، آن‌گاه برای هر $t_1\leq t_2$،

$$g_{u,x_\circ}(t_1)=\lim_{n\to\infty}g_{u_n,x_\circ}(t_1)\leq\lim_{n\to\infty}g_{u_n,x_\circ}(t_2)\leq g_{u,x_\circ}(t_2)$$

پس $u\in A$. (اثبات بسته بودن B مشابه است.)

همچنین A و B هر دو ناتهی هستند، چون اگر $u\in A$ آن‌گاه $-u\in B$.

حال چون $\mathbb{R}^2-\{\circ\}$ همبند است چنین چیزی ممکن نیست. پس فرض غلط است و در نتیجه $A\cap B\neq\emptyset$.

حال اگر $u\in A\cap B$، تابع $g_{u,x_\circ}$ هم صعودی و هم نزولی است و در نتیجه ثابت است. $\square$

لم ۲. اگر تحدید f به دو خط متقاطع L_1 و L_2 ثابت باشد، آن‌گاه f کلاً تابع ثابت است.

اثبات لم ۲. فرض کنید $x_\circ$ نقطه تقاطع دو خط فوق باشد. پس f روی هر دو خط L_1 و L_2 ثابت و برابر $f(x_\circ)$ است. حال برای هر نقطه‌ی $y\in\mathbb{R}^2$، خطی رسم کنید که دو خط فوق را در نقاط y_1 و y_2 قطع کند و y بین y_1 و y_2 باشد.

اکنون بنابر فرض مسأله، $f(y)$ باید بین $f(y_1)$ و $f(y_2)$ باشد ولی از طرفی

$$f(y_1)=f(y_2)=f(x_\circ)$$

پس $f(y)=f(x_\circ)$ و در نتیجه f تابع ثابت است. $\square$

حال به مسأله اصلی باز می‌گردیم. بنابر لم ۱، از هر نقطه‌ی x_0، خطی می‌گذرد که تحدید f به آن، تابع ثابت است و بنابر لم ۲، اگر f تابعی ثابت نباشد، این خطوط گذرنده از x_0های مختلف، موازی هستند. پس یا f تابعی ثابت است (که در آن صورت نیز حکم مسأله برقرار است) و یا بردار ناصفر u_0 وجود دارد که تحدید f به هر خط موازی u_0، ثابت است.

حال v را برداری واحد و عمود بر u_0 در نظر بگیرید و تعریف کنید

$$h(t) := f(tv)$$

اکنون برای هر $x \in \mathbb{R}^2$، داریم

$$f(x) = f\big((x.v)v + [x - (x.v)v]\big)$$

ولی از آن‌جا که $x - (x.v)v$ عمود بر v و در نتیجه موازی u_0 است، پس

$$f(x) = f((x.v)v) = h(x.v)$$

پس حکم ثابت شد.