۷)

فرض کنید A و B دو ماتریس ۲×۲ با درایه‌های حقیقی باشند به طوری که AB ترکیبی خطی از I و A و B است. نشان دهید BA نیز ترکیبی خطی از I و A و B است.

پاسخ:

قرار دهید $S =< I, A, B >$. چون به ازای هر ماتریس X از مرتبه دو داریم $\exists a, b \quad X^۲ + aX + bI = ۰$ (قضیهٔ کیلی-همیلتون) پس اگر $X \in S$ آنگاه $X^۲ \in S$ ، در نتیجه $(A+B)^۲, A^۲, B^۲ \in S$ بنابراین $BA = (A+B)^۲ - A^۲ - B^۲ - AB \in S$.

۸) نشان دهید برای هر پنج نقطه روی سطح کره، یک نیم‌کرهٔ بسته چنان می‌توان یافت که شامل حداقل چهار نقطه از آن پنج نقطه است.

توضیح: نیم‌کرهٔ بسته، مرز آن را نیز شامل می‌شود.

پاسخ:

می‌دانیم که از هر دو نقطه روی کره، دقیقاً یک دایرهٔ عظیمه می‌گذرد. (کافی است اشتراک کره با صفحه ای را در نظر بگیریم که از این دو نقطه و مرکز کره می‌گذرد.) حال دو نقطه از این پنج نقطه را در نظر گرفته و دایرهٔ عظیمه‌ای که از این دو نقطه می‌گذرد را رسم می‌کنیم که کره را به دو نیم کرهٔ بسته تقسیم می‌کند که در مرز مشترک‌اند. یکی از این نیم کره‌ها شامل حداقل دو نقطه از سه نقطهٔ باقیمانده است که نیم کرهٔ مطلوب ما است.

۹) فرض کنید $\{c_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{a_n\}$ سه دنباله از اعداد حقیقی نامنفی باشند. همچنین فرض کنید برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $a_{n+1} \leq a_n - b_n + c_n$ و سری $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ نیز همگرا باشد. ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ همگرا است.

پاسخ:

می‌نویسیم $b_n \leq (a_n - a_{n+1}) + c_n$ با جمع زدن از ۱ تا n داریم

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leq a_1 - a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} c_k$$

پس $\sum_{k=1}^{n} b_k \leq a_1 + \sum_{k=1}^{n} c_k$ با حد گرفتن $n \to +\infty$ و با توجه به همگرایی سری $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ همگرایی سری $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ نیز ثابت می‌شود.

اکنون در رابطه $b_n \leq (a_n - a_{n+1}) + c_n$ از عدد n تا عدد $m > n$ جمع می زنیم، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=n}^{m} b_k \leq a_n - a_{m+1} + \sum_{k=n}^{m} c_k$$

و یا

$$a_{m+1} \leq a_n + \sum_{k=n}^{m} c_k - \sum_{k=n}^{m} b_k$$

ابتداوقتی $m \to +\infty$ حد می‌گیریم

$$\lim_{m\to+\infty} a_{m+1} \leq a_n + \sum_{k=n}^{+\infty} c_k - \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$

یعنی دنبالهٔ $\{a_m\}$ کراندار است. اکنون وقتی $n \to +\infty$ حد بگیریم

$$\lim_{m\to+\infty} a_{m+1} \leq \liminf_{m\to+\infty} a_n + 0 - 0$$

و این دقیقاً یعنی $\{a_n\}$ همگرا است.

۱۰) ثابت کنید هیچ تابع پیوسته $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ وجود ندارد به طوری که برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $f(f(x))=\cos x$.

پاسخ: لم ۱. دقیقاً یک عدد حقیقی α وجود دارد که $\cos\alpha=\alpha$. همچنین $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$.

اثبات لم ۱. بنابر قضیهٔ مقدار میانی، حداقل یک α در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ با خاصیت بالا وجود دارد. از طرفی چون $\cos x$ در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ نزولی است پس دقیقاً یک نقطه ثابت در این بازه دارد. همچنین برای $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$ داریم $\cos x\geq 0>x$. و برای $x<-\frac{\pi}{2}$ داریم $\cos x>-1>x$ و برای $x>\frac{\pi}{2}$، داریم $\cos x<1<x$.

پس $\cos x=x$ دقیقاً یک جواب دارد و آن جواب در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ است. □

فرض کنیم تابع f وجود داشته باشد.

لم ۲. برای α مذکور در لم ۱، داریم $f(\alpha)=\alpha$.

اثبات لم ۲. داریم $f(f(\alpha))=\cos\alpha=\alpha$. در نتیجه $f(f(f(\alpha)))=f(\alpha)$ و از آنجا که $f\circ f=\cos$، پس $\cos f(\alpha)=f(\alpha)$. یعنی $f(\alpha)$ نیز یک نقطه ثابت $\cos x$ است پس بنابر لم ۱، $f(\alpha)=\alpha$.

□

لم ۳. تابع f روی بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ یک به یک است.

اثبات لم ۳. فرض کنید برای $x_1\neq x_2$ در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$، $f(x_1)=f(x_2)$.
آنگاه $\cos x_1=f(f(x_1))=f(f(x_2))=\cos x_2$ که این با یک به یک بودن تابع $\cos x$ روی $[0,\frac{\pi}{2}]$ در تناقض است. □

حال به حل مسأله اصلی باز می‌گردیم. بنابر لم ۳، f روی $[0,\frac{\pi}{2}]$ یک به یک است و چون پیوسته نیز هست پس باید اکیداً یکنوا باشد. از آنجا که $f(\alpha)=\alpha$ و $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$، پس بنابر پیوستگی f، $\varepsilon>0$ وجود دارد که

$$\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon,f(\alpha-\varepsilon)\in(0,\frac{\pi}{2})$$

حالت اول: $f|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ اکیداً صعودی است.

$$\begin{aligned} \alpha-\varepsilon<\alpha+\varepsilon &\Rightarrow f(\alpha-\varepsilon)<f(\alpha+\varepsilon) \\ &\Rightarrow f(f(\alpha-\varepsilon))<f(f(\alpha+\varepsilon)) \\ &\Rightarrow \cos(\alpha-\varepsilon)<\cos(\alpha+\varepsilon) \end{aligned}$$

که این با نزولی بودن $\cos x$ روی $[0,\frac{\pi}{2}]$ در تناقض است.

حالت دوم:

$f|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ اکیداً نزولی است.

$$\begin{aligned} \alpha-\varepsilon<\alpha+\varepsilon &\Rightarrow f(\alpha-\varepsilon)>f(\alpha+\varepsilon) \\ &\Rightarrow f(f(\alpha-\varepsilon))<f(f(\alpha+\varepsilon)) \\ &\Rightarrow \cos(\alpha-\varepsilon)<\cos(\alpha+\varepsilon) \end{aligned}$$

که باز هم با نزولی بودن $\cos x$ روی $[0,\frac{\pi}{2}]$ در تناقض است.

۱۱) نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n > ۱$ ، $۳^n - ۱$ بر $۲^n - ۱$ بخش پذیر نیست.

پاسخ:

برخلاف فرض کنیم که برای یک $n > ۱$، $۲^n - ۱ | ۳^n - ۱$. اولاً که n باید عددی فرد باشد زیرا اگر $n = ۲m$ آنگاه $۲^n = ۲^{۲m} \equiv ۱$ (پیمانه ۳) پس $۳ | ۲^n - ۱$ در حالی که $۳ \nmid ۳^n - ۱$. قرار می‌دهیم $n = ۲m + ۱$ و در این صورت $۳^n \equiv ۱$ (پیمانه $۲^n - ۱$) و همچنین اگر p عامل اولی از $۲^n - ۱$ باشد نیز خواهیم داشت

$$۳^n = ۳^{۲m+۱} \equiv ۱ \ (\text{پیمانه } p) \qquad (*)$$

چون $p \neq ۳$، عدد صحیح x وجود دارد که $۳x \equiv ۱$ (پیمانه p). با ضرب همنهشتی $(*)$ در $x^{۲m}$ خواهیم داشت $(x^m)^۲ \equiv ۳$ (پیمانه p)، یعنی ۳ یک مانده مربعی به پیمانه p است. بنابر یکی از تمرین‌های معروف قانون تقابل مربعی، p باید به صورت $۱۲k \pm ۱$ باشد. اکنون $۲^n - ۱$ حاصلضربی از اعداد بصورت $۱۲k \pm ۱$ است پس خود نیز باید بصورت $۱۲k \pm ۱$ باشد.

به وضوح $۲^n - ۱ = ۱۲k - ۱$ امکان ندارد و نیز اگر $۲^n - ۱ = ۱۲k + ۱$ آنگاه $۲^n = ۲(۶k + ۱)$ که در این صورت باید $k = ۰$ و $n = ۱$ باشد که بافرض مسئله در تناقض است.

۱۲) فرض کنید G گروهی است که دارای تعداد متناهی زیرگروه غیرنرمال است. نشان دهید هر زیرگروه نامتناهی G یک زیرگروه نرمال است.

پاسخ:

فرض کنید H یک زیرگروه نامتناهی و غیرنرمال G باشد پس $g \in G$ وجود دارد که $gH^{-1}g \nsubseteq H$

عضو $ghg^{-1} = x \in gHg^{-1} \setminus H$ را در نظر بگیرید. در این صورت $gxg^{-1} \notin < x >$ زیرا اگر $gxg^{-1} = x^n$ آنگاه $x = g^{-1}x^n g = (g^{-1}xg)^n = h^n \in H$ که تناقض است پس $gxg^{-1} \notin < x >$ یعنی $< x >$ نرمال نیست.

اگر $gHg^{-1} \setminus H$ نامتناهی باشد چون برای $x \in gHg^{-1} \setminus H$، $< x >$ غیرنرمال است و چون تعداد زیرگروه‌های غیرنرمال متناهی است پس اعضای متمایز x_1 و x_2 و $\cdots$ وجود دارند به طوری که

$$< x_1 > = < x_2 > = < x_3 > = \cdots$$

این یعنی $< x_1 >$ دارای نامتناهی مولد است (مثلاً x_1، x_2، $\cdots$) ولی هر گروه دوری فقط تعدادی متناهی مولد دارد و این تناقض است.

بنابراین $|gHg^{-1} \setminus H| < +\infty$. حال قرار دهید $gHg^{-1} \cap H = K$ و $\alpha \in gHg^{-1} \setminus H$ داریم

$$\alpha K \subseteq gHg^{-1} = (gHg^{-1} \setminus H) \cup K$$

چون $gHg^{-1} \setminus H$ متناهی است و αK نامتناهی باید داشته باشیم $\alpha K \cap K \neq \emptyset$ که نتیجه می‌دهد $\alpha K = K$ و لذا $\alpha \in H$ و این یک تناقض است.