

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

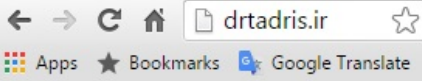
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم

کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۱- فرض کنید  $A = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \cap \mathbb{Q}$ . در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱.  $\sup A \in A$       ۲.  $\inf A \in A$

۳.  $A$  در  $R$ ، سوپریمم ندارد.      ۴.  $A$  در  $R$  دارای اینفیمم است.

۲- اگر  $(a_n)$  و  $(b_n)$  دو دنباله از اعداد حقیقی باشند، آنگاه کدام گزاره نادرست است؟

۱.  $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n)$

۲. دنباله  $(a_n)$  همگراست اگر و تنها اگر هر زیر دنباله آن حداقل یک زیر دنباله همگرا داشته باشد.

۳.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  وجود دارد اگر و تنها اگر  $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$

۴. اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  موجود باشد، آنگاه  $\underline{\lim}(a_n + b_n) \leq \underline{\lim} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

۳- کدام یک از سری های زیر همگراست؟

۱.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$       ۲.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$       ۳.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$       ۴.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

۴- فرض کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد و  $a_n > 0$ . کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

۱.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$  همگراست.      ۲.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$  همگراست.

۳.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  در حالت کلی همگرا نیست.      ۴.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$  همواره همگراست.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲

۵- فرض کنیم  $(M, d)$  فضای متریک و  $A \subseteq M$  و  $p \in M$  و  $A'$  مجموعه نقاط انباشتگی  $A$  و  $A^\circ$  مجموعه نقاط درونی  $A$  باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱.  $p \in A'$  اگر و تنها اگر هر همسایگی  $p$ ،  $A \setminus \{p\}$  را در نامتناهی نقطه قطع کند.

۲.  $p \in A'$  اگر و تنها اگر به ازای هر  $r > 0$ ،  $N_r(p) \cap A \neq \emptyset$ .

۳.  $p \in A^\circ$  اگر و تنها اگر  $p \in A$ .

۴.  $p \in A^\circ$  اگر و تنها اگر یک گوی بازی مانند  $s(p; r)$  موجود باشد که  $s(p; r) - \{p\} \subseteq A$ .

۶- مجموعه نقاط انباشتگی، مجموعه اعداد گویا، کدام است؟

۱. اعداد گویا      ۲. اعداد اصم      ۳.  $\emptyset$       ۴. اعداد حقیقی

۷- کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

۱. در فضای متریک  $(M, d)$  اگر  $A \subseteq M$  فشرده باشد آنگاه  $A$  بسته است.

۲. مجموعه اعداد گویا در اعداد حقیقی چگال است.

۳. مجموعه اعداد طبیعی در اعداد حقیقی چگال است.

۴. اجتماع هر خانواده متناهی، از مجموعه های بسته، بسته است.

۸- کدام یک از توابع زیر یک تابع متریک روی اعداد حقیقی است؟

۲.  $d_2(x, y) = |x^2 - y^2|$

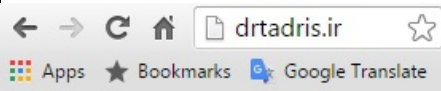
۱.  $d_1(x, y) = (x - y)^2$

۴.  $d_4(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + 3|x - y|}$

۳.  $d_3(x, y) = |x - 3y|$

۹- مجموعه انباشتگی  $(2, 3) \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$  کدام است؟

۱.  $[2, 3]$       ۲.  $[2, 3] \cup \{0\}$       ۳.  $(2, 3) \cup \{0\}$       ۴.  $[0, 3]$



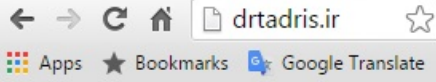
تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



$$f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ 1-x & x \notin Q \end{cases} \quad -10$$

در چه نقاطی پیوسته است؟

- ۰۱ در تمام نقاط پیوسته است.  
 ۰۲ فقط در اعداد گویا پیوسته است.  
 ۰۳ فقط در نقطه  $x = \frac{1}{2}$  پیوسته است.  
 ۰۴ فقط در اعداد اصم پیوسته است.

-۱۱ فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو فضای متریک و  $f: X \rightarrow Y$  تابع پیوسته باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

- ۰۱ تصویر وارون هر مجموعه باز در  $Y$ ، یک مجموعه باز در  $X$  است.  
 ۰۲ وارون تابع  $f$  در صورت وجود پیوسته است.  
 ۰۳ تصویر هر مجموعه باز، باز است.  
 ۰۴  $f$  سوپریمم و اینفیمم مقادیر خود را در نقطه ای از  $X$  می گیرد.

-۱۲ کدام یک از توابع زیر به طور یکنواخت پیوسته است؟

- ۰۱ تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  روی  $(0, \infty)$ .  
 ۰۲ تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  روی  $[a, \infty)$  که  $a > 0$ .  
 ۰۳ تابع  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  روی  $(-1, 1)$ .  
 ۰۴ تابع  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$  روی  $(-1, 1)$ .

-۱۳ اگر  $f'$  به ازای هر مقدار حقیقی موجود باشد و  $f(a) = f(b) = f(c) = 0$  ( $a < b < c$ )، آنگاه معادله  $f'(x) = 0$  حداقل چند جواب دارد؟

- ۰۱ صفر      ۰۲ دو      ۰۳ یک      ۰۴ سه

-۱۴ کدام یک از توابع زیر در صفر مشتق پذیر نیست؟

- ۰۱  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$   
 ۰۲  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$   
 ۰۳  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$   
 ۰۴  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

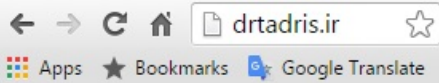
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم

کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۱۵- فرض کنید  $f$  و  $\alpha$  دو تابع کراندار باشند. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. اگر  $f$  پیوسته باشد، آنگاه  $f \in R(\alpha)$ .
۲. اگر  $\alpha$  صعودی باشد، آنگاه  $f \in R(\alpha)$ .
۳. اگر  $\alpha$  پیوسته باشد، آنگاه  $f \in R(\alpha)$ .
۴. اگر  $f$  پیوسته و  $\alpha$  صعودی باشد، آنگاه  $f \in R(\alpha)$ .

۱۶- اگر  $f$  یک تابع کراندار باشد، آنگاه

۱. اگر  $f \in R$  آنگاه  $|f| \in R$ .
۲. اگر  $|f| \in R$  آنگاه  $f \in R$ .
۳. اگر  $f^2 \in R$  آنگاه  $f \in R$ .
۴. ممکن است  $f^3 \in R$  ولی  $f \notin R$ .

۱۷- کدام گزینه در مورد دنباله  $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$  بر  $[0,1]$ ، درست است؟

۱.  $f_n \rightarrow 0$  به طور یکنواخت همگراست.
۲.  $f_n \rightarrow 0$  فقط به طور نقطه به نقطه همگراست.
۳.  $f_n \rightarrow f$  به طور نقطه نقطه همگراست که  $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x \neq 0,1 \end{cases}$ .
۴.  $f_n \rightarrow f$  به طور یکنواخت همگراست که  $f$  همان تابع در گزینه (ج) می باشد.

۱۸- کدام دنباله زیر همگرایی یکنواخت است؟

۱.  $f_n(x) = nx e^{-nx}$  روی  $[0,1]$ .
۲.  $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$  روی  $[0,1]$ .
۳.  $f_n(x) = x^n(1-x)$  روی  $[0,1]$ .
۴.  $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$  روی  $(0,1)$ .

۱۹- اگر  $K$  یک فضای متری و  $f_n$  یک دنباله از توابع روی  $K$  باشد که به طور نقطه ای به تابع  $f$  همگراست. آنگاه در کدام صورت می توان مطمئن شد که این همگرایی یکنواخت است؟

۱.  $K$  فشرده و  $f_n$  ها پیوسته.
۲.  $K$  فشرده و  $(f_n)$  دنباله نزولی.
۳.  $f_n$  ها پیوسته و  $(f_n)$  دنباله نزولی.
۴.  $K$  فشرده و  $f_n$  ها پیوسته و  $(f_n)$  دنباله نزولی.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

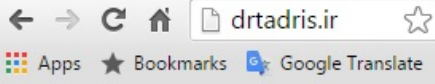
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم

کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۲۰- کدام گزینه در مورد سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{x+\frac{1}{2}}}$  بر  $[0, \infty)$ ، کامل تر است؟

۱. به طور یکنواخت همگراست.

۲. این سری فقط همگرای نقطه ای است.

۳. این سری فقط همگرای نقطه ای است و تابع همگرای آن پیوسته است.

۴. واگراست.

### سوالات تشریحی

۱- الف) فرض کنید  $A \subseteq M$  و  $(M, d)$  فضای متریک باشد. نقطه انباشتگی مجموعه  $A$  را تعریف کنید.  
ب) ثابت کنید اگر  $p \in M$  نقطه انباشتگی  $A$  باشد آنگاه هر همسایگی  $P$  شامل تعداد نامتناهی نقطه از  $A$  است.

۲- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو فضای متریک و  $f$  تابعی از  $X$  به  $Y$  باشد. ثابت کنید اگر  $E \subseteq X$  فشرده و  $f$  بر  $E$  پیوسته باشد، آنگاه  $f$  بر  $E$  پیوسته یکنواخت است.

۳- اگر  $f''$  بر  $[a, b]$  موجود و متناهی باشد و  $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$ ، آنگاه ثابت کنید نقطه ای مانند  $c$  در  $(a, b)$  وجود دارد به طوری که  $f'''(c) = 0$ .

۴- شرط ریمان برای انتگرال پذیری را بیان و اثبات نمایید.

۵- ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه دنباله  $(f_n)$  همگرای یکنواخت به تابع  $f$  روی  $E$  باشد آنست که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$  به طوری که  $\sigma_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$ .