

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

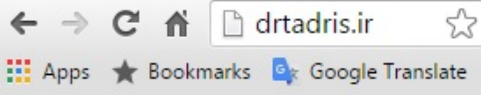
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم

کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۱- کدام گزینه درست است؟

- ۰۱ هر دنباله ی کراندار، همگراست.  
 ۰۲ هر دنباله ی یکنوا همگراست.  
 ۰۳ هر دنباله ی همگرا، یکنواست.  
 ۰۴ هر دنباله ی کراندار دارای زیر دنباله ی همگراست.

۲- فرض کنید  $Q, P$  دو افراز از  $[a, b]$  باشند. در این صورت کدام گزینه درست است؟

- ۰۱  $U(P, f, \alpha) \leq L(Q, f, \alpha)$   
 ۰۲  $L(P, f, \alpha) \leq L(Q, f, \alpha)$   
 ۰۳  $L(P, f, \alpha) \leq U(Q, f, \alpha)$   
 ۰۴  $U(P, f, \alpha) \leq U(Q, f, \alpha)$

۳- کدام گزینه همگراست؟

- ۰۱  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$   
 ۰۲  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^n - 1)^n}$   
 ۰۳  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)}$   
 ۰۴  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \right)$

۴- در یک فضای متریک کدام گزینه درست است؟

- ۰۱ اجتماع هر خانواده از مجموعه های باز، باز است.  
 ۰۲ اشتراک هر خانواده از مجموعه های باز، باز است.  
 ۰۳ اجتماع هر خانواده از مجموعه های بسته، بسته است.  
 ۰۴ اشتراک هر خانواده از مجموعه های بسته، باز است.

۵- فرض کنید  $(M, d)$  یک فضای متریک باشد و  $A \subseteq M$  و  $p \in M$  یک نقطه انباشتگی  $A$  باشد. در این صورت کدام گزینه است؟

- ۰۱ همسایگی از  $P$  وجود دارد که شامل تعداد متناهی نقطه از  $A$  است.  
 ۰۲ هر همسایگی از  $P$ ، شامل تعداد نامتناهی نقطه از  $A$  است.  
 ۰۳ هر همسایگی از  $P$ ، شامل تعداد متناهی نقطه از  $A$  است.  
 ۰۴ هر همسایگی از  $P$ ، تنها شامل یک نقطه از  $A$  است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

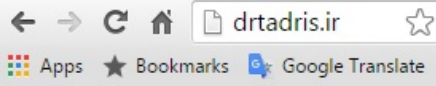
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم

کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۶- کدام گزینه درست است؟

۱. زیر مجموعه های یک فضای متریک گسسته، همواره بازند.
۲. زیر مجموعه های یک فضای متریک گسسته، همواره بسته اند.
۳. زیر مجموعه های یک فضای متریک گسسته، نه باز و نه بسته اند.
۴. زیر مجموعه های یک فضای متریک گسسته، هم باز و هم بسته اند.

۷- فرض کنید  $(M, d)$  یک فضای متریک فشرده و  $A \subseteq M$  باشد. در این صورت کدام گزینه است؟

۱.  $A$  فشرده است.
۲.  $A$  بسته است.
۳.  $A$  دارای نقطه ی انباشتگی است
۴. هرگاه  $A$  بسته باشد،  $A$  فشرده است.

۸- کدام گزینه درست است؟

۱. هر زیر مجموعه ی نامتناهی و کراندار  $R^k$ ، فشرده است.
۲. هر زیر مجموعه ی بسته از  $R^k$ ، فشرده است.
۳. هر زیر مجموعه ی نامتناهی و کراندار  $R^k$ ، دارای نقطه ی انباشتگی است.
۴. هر زیر مجموعه ی نامتناهی و بسته  $R^k$ ، فشرده است.

۹- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه ی همبند باشند. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱.  $A \cup B$  بسته است.
۲. هرگاه  $B \subseteq C \subseteq \bar{B}$ ، آنگاه  $C$  همبند است.
۳.  $A \cup B$  همبند است.
۴. هرگاه  $A \subseteq C \subseteq B$ ، آنگاه  $C$  همبند است.

۱۰- فرض کنید  $f$  یک تابع پیوسته بر فضای متریک  $X$  باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. هرگاه  $f$  یک به یک و  $X$  فشرده باشد، آنگاه  $f^{-1}$  پیوسته است.
۲. هرگاه  $f$  یک به یک باشد، آنگاه  $f^{-1}$  پیوسته است.
۳. هرگاه  $X$  فشرده باشد، آنگاه  $f^{-1}$  پیوسته است.
۴. هرگاه  $f$  یک به یک و  $X$  کراندار باشد، آنگاه  $f^{-1}$  پیوسته است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

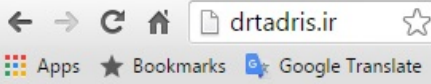
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم

کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۱۱- فرض کنید  $f$  بر  $(a, b)$  صعودی باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$ ، از نوع دوم است.
۲. مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$ ، شمارش پذیر است.
۳. مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$ ، شمارش ناپذیر است.
۴. مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$ ، تهی است.

۱۲- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو فضای متریک و  $f$  یک تابع پیوسته از  $X$  به  $Y$  و  $F \subseteq X$  باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱. هرگاه  $F$  در  $X$  باز باشد، آنگاه  $f(F)$  در  $Y$  باز است.
۲.  $f$  بر  $F$  پیوسته یکنواخت است.
۳. هرگاه  $F$  در  $X$  بسته باشد، آنگاه  $f(F)$  بسته است.
۴. هرگاه  $F$  همبند باشد، آنگاه  $f(F)$  همبند است.

۱۳- تابع  $f$  را با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  در نظر بگیرید. در این صورت تعداد نقاط پیوسته آن چقدر است؟

۱. صفر
۲. ۱
۳. ۲
۴. ۳

۱۴- تابع  $f$  با ضابطه زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n}, (m, n) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

کدام گزینه درست است؟

۱.  $f \notin \mathbb{R}$  بر  $[0, 1]$
۲.  $f \circ f \in \mathbb{R}$  بر  $[0, 1]$
۳.  $f \circ f \notin \mathbb{R}$  بر  $[0, 1]$
۴.  $f$  پیوسته است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم

کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲

۱۵- کدام گزینه زیر درست است؟

۱. اگر  $f \in R(\alpha)$  و  $g \in R(\alpha)$ ، آنگاه  $g \circ f \in R(\alpha)$ .
۲. اگر  $f \in R(\alpha)$  و  $g$  پیوسته باشد، آنگاه  $g \circ f \in R(\alpha)$ .
۳. اگر  $f \in R(\alpha)$  و  $g$  بر  $[c, d]$  پیوسته که در آن  $c \leq f \leq d$ ، آنگاه  $g \circ f \in R(\alpha)$ .
۴. اگر  $f \in R(\alpha)$  و  $g$  بر  $[c, d]$  کراندار که در آن  $c \leq f \leq d$ ، آنگاه  $g \circ f \in R(\alpha)$ .

۱۶- کدام گزینه درست است؟

۱. هرگاه  $\{f_n\}$  دنباله ای از توابع پیوسته باشد و به تابع  $f$  همگرا باشد، آنگاه  $f$  پیوسته است.
۲. هرگاه  $f_n \Rightarrow f$  و  $f_n \in R(\alpha)$  بر  $[a, b]$ ، آنگاه  $f \in R(\alpha)$ .
۳. هرگاه  $\{f_n\}$  دنباله ای از توابع نزولی باشد که  $f_n \rightarrow f$ ، آنگاه  $f_n \Rightarrow f$ .
۴. هرگاه  $f_n \rightarrow f$  و  $f_n \in R(\alpha)$  بر  $[a, b]$ ، آنگاه  $f \in R(\alpha)$ .

۱۷- کدام گزینه درست است؟

۱. هرگاه  $\sum |f_n|$  به طور یکنواخت همگرا و  $\{g_n\}$  به طور یکنواخت کراندار باشد، آنگاه  $\sum f_n g_n$  به طور یکنواخت همگراست.
۲. هرگاه  $\sum |f_n|$  به طور یکنواخت همگرا و  $\{g_n\}$  کراندار و پیوسته باشد، آنگاه  $\sum f_n g_n$  به طور یکنواخت همگراست.
۳. هرگاه  $\sum f_n$  به طور یکنواخت همگرا و  $\{g_n\}$  به طور یکنواخت کراندار باشد، آنگاه  $\sum f_n g_n$  به طور یکنواخت همگراست.
۴. هرگاه  $\sum f_n$  به طور یکنواخت همگرا و  $\{g_n\}$  کراندار و پیوسته باشد، آنگاه  $\sum f_n g_n$  به طور یکنواخت همگراست.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

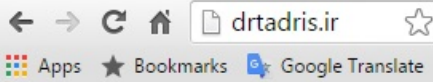
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم

کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۱۸- کدام گزینه درست است؟

۱. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  کراندار و  $\alpha$  پیوسته باشد، آنگاه  $f \in R(\alpha)$ .
۲. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و  $\alpha$  بر  $[a, b]$  کراندار باشد، آنگاه  $f \in R(\alpha)$ .
۳. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  صعودی و  $\alpha$  بر  $[a, b]$  پیوسته باشد، آنگاه  $f \in R(\alpha)$ .
۴. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  صعودی و  $\alpha$  بر  $[a, b]$  پیوسته و صعودی باشد، آنگاه  $f \in R(\alpha)$ .

۱۹- هرگاه  $f$  صعودی و  $g$  پیوسته و نامنفی باشد، آنگاه نقطه ای مانند  $c$  در  $[a, b]$  وجود دارد به طوری که

$$1. \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx$$

$$2. \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx$$

$$3. \int_a^b f(x)g(x)dx = f'(a)\int_a^c g(x)dx + f'(b)\int_c^b g(x)dx$$

$$4. \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx$$

۲۰- مقدار  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $(0, 1]$       ۲.  $\{0\}$       ۳.  $\{1\}$       ۴.  $\{0, 1\}$

### سوالات تشریحی

۱- ثابت کنید اگر فضای متریک  $M$  فشرده باشد، آنگاه هر زیرمجموعه نامتناهی  $E$  از  $M$  دارای یک نقطه انباشتگی است. ۱.۴۰ نمره

۲- فضای متریک  $X$  با متر گسسته را در نظر بگیرید. کدام یک از احکام زیر درست است؟ چرا؟ ۱.۴۰ نمره  
 الف) هر زیرمجموعه از این فضا، مجموعه باز است.  
 ب) هر تابع از فضای  $X$  به توی فضای متریک دلخواه  $Y$  پیوسته است.  
 ج) هر تابع از فضای متریک دلخواه  $Y$  به توی فضای  $X$  پیوسته است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲

۳- فرض کنید تابع  $f$  بر  $[a, b]$  دارای مشتق متناهی باشد و  $f(a) = f(b) = 0$ . ثابت کنید به ازای هر  $\lambda$  عددی مانند  $a < c < b$  وجود دارد که  $f'(c) = \lambda f(c)$ .

۴- فرض کنید تابع حقیقی  $f$  بر  $[a, b]$  صعودی و تابع  $\alpha$  بر  $[a, b]$  صعودی و پیوسته باشد، ثابت کنید  $f \in R(\alpha)$ .

۵- قضیه دینی را بیان و اثبات نمایید.

۱.۴۰ نمره