

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

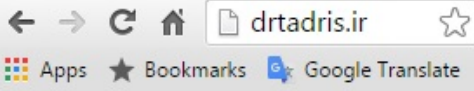
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم

کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۱- گزینه صحیح کدام است؟

۱. اگر  $P$  عددی اول باشد، آنگاه  $\sqrt{P}$  گویاست.
۲. مجموعه  $\{P \mid P \in \mathbb{R}, P > 0, P^2 < 2\}$  از بالا کران دار است. (منظور از  $\mathbb{R}$  مجموعه ی اعداد حقیقی است).
۳. هر زیر مجموعه ی کران دار از اعداد گویا دارای اینفیمم و سوپریمم گویا است.
۴. هر زیر مجموعه ی غیر تهی و از بالا کران دار از اعداد گویا سوپریمم گویا دارد.

۲- کدام گزینه در مورد دنباله ی  $\left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$  درست است؟

۱. حد پایین آن ۱- است.
۲. حد بالای آن صفر است.
۳. همگراست.
۴. حد پایین آن صفر است.

۳- اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  یک سری نامنفی باشد، آنگاه ...

۱. شرط لازم و کافی برای همگرایی سری فوق، کران دار بودن دنباله  $\{S_n\}$  می باشد ( $S_n = a_1 + \dots + a_n$ ).
۲. شرط کافی برای همگرایی سری فوق، کران دار بودن دنباله  $\{a_n\}$  می باشد.
۳. شرط لازم برای همگرایی سری فوق، کران دار بودن دنباله  $\{a_n\}$  می باشد.
۴.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  شرط لازم و کافی برای همگرایی سری فوق می باشد.

۴- فرض کنید  $a_n \geq 0$  و سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد. در این صورت کدام یک از سری های زیر ممکن است اگرا باشد؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \quad (k \in \mathbb{N}) \sum_{n=k}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

۵- سری توافقی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  به ازای کدام  $\alpha$  ها همگراست؟

۱.  $\alpha = 1$
۲.  $0 < \alpha < 1$
۳.  $\alpha > 1$
۴.  $\alpha = 0$

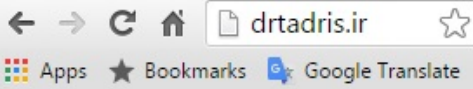
تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۶- فرض کنید  $A = \{\frac{k}{2^n} \mid 1 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ ، در این صورت  $A$  برابر است با

۱.  $(0,1)$       ۲.  $[\frac{1}{2}, 1]$       ۳.  $[0,1]$       ۴.  $[0, \frac{1}{2}]$

۷- برای هر فضای متریک  $(M,d)$ ، کدام گزاره صحیح است؟

۱. اجتماع هر خانواده از مجموعه های باز، باز است.
۲. اجتماع هر خانواده از مجموعه های بسته، بسته است.
۳. اشتراک هر خانواده از مجموعه های باز، باز است.
۴. اجتماع یک مجموعه ی باز با مجموعه ای بسته، مجموعه ای باز است.

۸- فرض کنید  $(M,d)$  یک فضای متریک و  $A$  زیر فضایی از آن باشد و  $U \subseteq A$ . آنگاه  $U$  در  $A$  باز است، اگر و فقط اگر ...

۱. مجموعه ی بازی مانند  $O$  در  $M$  موجود باشد که  $U = A \cap O$ .
۲.  $U$  در  $M$  باز باشد.
۳. مجموعه ی بازی مانند  $O$  در  $M$  موجود باشد که  $A = O \cap U$ .
۴.  $U$  در  $M$  بسته باشد.

۹- هرگاه  $X$  یک فضای متریک،  $A \subseteq X$  فشرده و  $B \subseteq X$  باز باشد، آنگاه کدام یک از مجموعه های زیر فشرده است؟

۱.  $B - A$       ۲.  $B \cup A$       ۳.  $A - B$       ۴.  $A \cap B$

۱۰- اگر  $A$  زیر مجموعه ی یک فضای متریک باشد، کدام گزینه با سایرین معادل نیست؟

۱.  $A$  فشرده است.
۲.  $A$  بسته و کران دار است.
۳. هر زیر مجموعه ی نامتناهی  $A$  نقطه ی انباشتگی دارد.
۴. هر دنباله در  $A$  زیر دنباله ای همگرا به نقطه ای از  $A$  دارد.

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

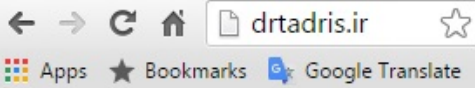
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم

کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۱۱- هرگاه  $X$  یک فضای متریک،  $A \subseteq X$  و  $B \subseteq X$  دو مجموعه ی ناتهی همبند باشند، آنگاه کدام یک از مجموعه های زیر ممکن است ناهمبند باشند؟

۰.۱  $\bar{A}$       ۰.۲  $A \cup B$

۰.۳  $A \cap B$       ۰.۴ مجموعه ی  $C$  به طوری که  $A \subseteq C \subseteq \bar{A}$  باشد.

۱۲- فرض کنید  $f: [0,1] \rightarrow R$  تابعی پیوسته باشد و  $Z(f) = \{x | f(x) = 0\}$ . در این صورت  $Z(f)$  مجموعه ای ..

۰.۱ باز است.      ۰.۲ فشرده است.

۰.۳ بسته است ولی فشرده نیست.      ۰.۴ همبند است.

۱۳- اگر  $f$  یک تابع بر فضای متریک  $X$  باشد، آنگاه  $f^{-1}$  پیوسته است اگر ...

۰.۱  $f$  پیوسته و  $X$  فشرده باشد.      ۰.۲  $f$  پیوسته و یک به یک باشد.

۰.۳  $f$  پیوسته و یک به یک و  $X$  فشرده باشد.      ۰.۴  $f$  پیوسته و پوشا و  $X$  فشرده باشد.

۱۴- تابع  $f$  با تعریف زیر در چه نقاطی پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \notin Q \\ m \sin \frac{1}{n} & , x \in Q (x = \frac{m}{n}, (m, n) = 1, n \in N) \end{cases}$$

۰.۱ در همه نقاط پیوسته است.      ۰.۲ فقط در  $X=0$  پیوسته است.

۰.۳ در تمام نقاط گویا پیوسته است.      ۰.۴ فقط در نقاط اصم پیوسته است.

۱۵- اگر  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع باشد و  $A \subseteq X, B \subseteq Y$  مجموعه هایی دلخواه باشند. کدام مورد شرط لازم و کافی برای پیوستگی  $f$  می باشد؟

۰.۱  $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$       ۰.۲  $f^{-1}(B)$  مجموعه ای باز باشد.

۰.۳  $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$       ۰.۴  $f(A)$  مجموعه ای باز باشد.

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲

۱۶- فرض کنید  $A \subseteq R, f: A \rightarrow R, g: A \rightarrow R$  (مجموعه ی اعداد حقیقی) توابعی پیوسته ی یکنواخت باشند. در

این صورت

۱.  $fg$  بر مجموعه ی  $A$  پیوسته ی یکنواخت است.

۲.  $fg$  بر مجموعه ی کران دار  $A$  پیوسته ی یکنواخت است.

۳.  $\frac{f}{g}$  بر مجموعه ی  $A$  پیوسته ی یکنواخت است.

۴.  $fg$  بر مجموعه ی  $A$  پیوسته ی یکنواخت است اگر تابع  $f$  کران دار باشد.

۱۷- فرض کنید تابع برداری  $f$  بر بازه ی  $[a, b]$  پیوسته و بر بازه ی  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد. آنگاه:

۱. عددی مانند  $c \in (a, b)$  موجود است که  $\|f(b) - f(a)\| \geq (b-a)\|f'(c)\|$

۲. به ازای هر  $c \in (a, b)$  داریم:  $\|f(b) - f(a)\| \geq (b-a)\|f'(c)\|$

۳. به ازای هر  $c \in (a, b)$  داریم:  $\|f(b) - f(a)\| \leq (b-a)\|f'(c)\|$

۴. عددی مانند  $c \in (a, b)$  موجود است که  $\|f(b) - f(a)\| \leq (b-a)\|f'(c)\|$

۱۸- تابع  $f$  باضابطه ی زیر را در نظر بگیرید. این تابع در چه نقاطی دارای مشتق است؟ (منظور از  $Q$  مجموعه ی اعداد گویا می باشد).

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in Q \\ 0 & , x \notin Q \end{cases}$$

۱.  $\{0\}$       ۲.  $Q$       ۳.  $\emptyset$       ۴.  $R$

۱۹- فرض کنید  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  و  $m \leq f \leq M$  باشد (  $M$  و  $m$  به ترتیب سوپریمم و اینفیمم تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  می باشند). در این صورت تابع  $h = \varphi \circ f$  بر  $[a, b]$  نسبت به  $\alpha$  دارای انتگرال است اگر ...

۱. تابع  $\varphi$  صعودی باشد.      ۲. تابع  $\varphi$  بر  $[m, M]$  پیوسته باشد.

۳. تابع  $\varphi$  بر  $[m, M]$  صعودی باشد.      ۴. تابع  $\varphi$  کران دار باشد.

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲

۲۰- فرض کنید  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$  بر  $[a, b]$ ،  $M$  و  $m$  به ترتیب سوپریمم و اینفیمم تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  باشد. در این صورت داریم:

۱.  $\int_a^b f d\alpha = \lambda(\alpha(b) - \alpha(a))$  به ازای هر  $m \leq \lambda \leq M$

۲.  $\int_a^b f d\alpha \leq \lambda(\alpha(b) - \alpha(a))$  به ازای هر  $m \leq \lambda \leq M$

۳.  $\int_a^b f d\alpha = \lambda(\alpha(b) - \alpha(a))$  ای موجود است که  $m \leq \lambda \leq M$  و

۴.  $\int_a^b f d\alpha = 0$  ای موجود است که  $m \leq \lambda \leq M$  و

۲۱- فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله ای از توابع پیوسته بر  $E$  باشد که به طور یکنواخت به  $f$  همگراست ( $E$  یک زیرمجموعه از یک فضای متریک است). در این صورت:

۱.  $f$  پیوسته است.  
۲.  $f$  پیوسته یکنواخت است.  
۳. ممکن است  $f$  پیوسته نباشد.  
۴.  $f$  پیوسته و یک به یک است.

۲۲- با فرض اینکه  $f_n \Rightarrow f$ ،  $g_n \Rightarrow g$ ، کدام یک از دنباله های زیر همگرای یکنواخت است؟

۱.  $\{f_n + g_n\}$       ۲.  $\{f_n g_n\}$       ۳.  $\{f_n / g_n\}$       ۴.  $\{g(f_n)\}$

۲۳- کدام یک از دنباله های زیر همگرای یکنواخت نیست؟

۱.  $f_n(x) = x^n(1-x)$ ،  $x \in [0,1]$       ۲.  $g_n(x) = \frac{\cos nx}{nx}$ ،  $x \in (0,1)$

۳.  $h_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx}$ ،  $x \in [0,1]$       ۴.  $k_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ ،  $x \in (0,1)$

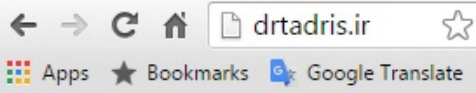
تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آمار ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲



۲۴- با فرض اینکه  $f_n \Rightarrow f$  بر  $[a, b]$ ، کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha \quad .1$$

.۲ با شرط اینکه  $f_n$  ها بر  $[a, b]$  مشتق پذیر باشند، آنگاه  $f$  نیز مشتق پذیر است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{پیوسته است.} \quad .3$$

.۴ با شرط اینکه  $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$  بر  $[a, b]$  باشند، آنگاه  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$  بر  $[a, b]$  است.

۲۵- کدام یک از سری های زیر بر  $\mathbb{R}$  همگرای یکنواخت است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \quad .4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad .3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad .2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad .1$$

### سوالات تشریحی

نمره ۱.۷۵

۱- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو فضای متریک و  $f$  تابعی پیوسته از  $X$  به  $Y$  باشد. نشان دهید اگر  $F \subseteq X$  فشرده باشد، آنگاه  $f(F)$  نیز فشرده است.

نمره ۱.۷۵

۲- الف) با فرض اینکه  $A \subseteq \mathbb{R}$  مجموعه ای نافشرده باشد، تابعی پیوسته بر  $A$  مثال بزنید که کران دار نباشد.  
ب) اگر  $f$  بر بازه  $[a, b]$  مشتق پذیر باشد، آنگاه نشان دهید  $f'$  بر  $[a, b]$  دارای ناپیوستگی ساده نیست.

نمره ۱.۷۵

۳- نشان دهید هر زیر مجموعه ی بسته و کران دار  $\mathbb{R}^k$  فشرده است (قضیه هایینه - بورل).

نمره ۱.۷۵

۴- الف) اگر  $f$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته و  $\alpha$  بر  $[a, b]$  صعودی باشد، آنگاه نشان دهید  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ .  
ب) نشان دهید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$  بر  $\mathbb{R}$  به طور یکنواخت همگراست.