

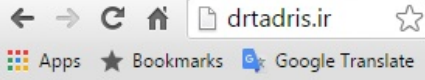
تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها، علوم کامپیوتر، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)  
آمار ریاضی ۱۱۱۳۲۲.



۱- گزینه صحیح کدام است؟

۱. اعداد گویا مجموعه ای بسته در اعداد حقیقی است.
۲. هر زیر مجموعه کراندار از اعداد گویا دارای مقدار اینفیموم و سوپریموم گویاست.
۳. اعداد گویا مجموعه ای چگال در اعداد حقیقی است.
۴. اعداد گویا مجموعه ای همبند است.

۲- کدام گزینه در مورد دنباله  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cos n\pi \right\}$  درست است؟

۱. حد بالای آن  $e$  است.
۲. همگراست.
۳. حد پایینی آن  $e$  است.
۴. حد پایینی آن  $0$  است.

۳- اگر  $a_n \geq 0$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد کدام سری ممکن است واگرا باشد؟

۱.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$
۲.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$
۳.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$  و  $a_n \neq 1$
۴.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$

۴- کدام گزینه شرط لازم و کافی برای گسسته بودن یک فضای متری است؟

۱. هر دنباله در آن کوشی است.
۲. هر گوی باز در آن مجموعه یکانی است.
۳. هر مجموعه یکانی باز است.
۴. مجموعه های هم بازو هم بسته، فقط تهی و خود فضا است.

۵- فرض کنید مجموعه های  $A, B$  همبند باشند، کدام گزینه با شرایط ذکر شده ممکن است نا همبند باشد؟

۱.  $\bar{A}$
۲.  $A \cup B$ ، اگر  $A \cap B \neq \emptyset$
۳.  $A \subseteq C \subseteq \bar{A}$ ، اگر  $C$
۴.  $A \subseteq C \subseteq B$ ، اگر  $C$

۶- اگر تابع  $f$  بر فضای متریک فشرده  $X$  پیوسته باشد، کدام گزینه میتواند نادرست باشد؟

۱.  $f(X)$  فشرده است.
۲.  $f^{-1}$  پیوسته است.
۳.  $f(X)$  کراندار است.
۴.  $f$  بر  $X$  پیوسته یکنواخت است.

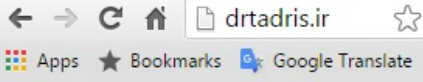
تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها، علوم کامپیوتر، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)  
(آمار ریاضی ۱۱۱۱۳۲۲)



۷- کدام گزینه در مورد تابع  $f: X \rightarrow Y$  با بقیه معادل نیست؟

۱. به ازای هر زیر مجموعه باز  $A \subseteq X$ ،  $f(A)$  در  $Y$  باز است.

۲. به ازای هر زیر مجموعه  $A \subseteq X$ ،  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

۳.  $f$  تابعی پیوسته است.

۴. به ازای هر زیر مجموعه  $B \subseteq Y$ ،  $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$

۸- گزاره "اگر تابع حقیقی  $f$  در  $[0,1]$  پیوسته و در  $(0,1)$  مشتق پذیر و  $f(a) = f(b)$  باشد آنگاه

۱. برای هر  $c \in (0,1)$ ،  $f'(c) = 0$  .  
۲.  $c \in (0,1)$  موجود است بطوریکه  $f'(c) = 0$  .

۳.  $f$  بر  $[0,1]$  تابعی ثابت است.  
۴.  $f$  بر  $[0,1]$  ماکزیمم ندارد.

۹- مجموعه نقاط مشتق‌پذیر تابع  $f$  بر  $R$  باضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$  کدام گزینه است؟

۱.  $\{0\}$  .  
۲.  $Q$  .  
۳.  $Q^c$  .  
۴.  $\Phi$  (مجموعه تهی)

۱۰- شرط لازم برای انتگرال پذیری تابع حقیقی  $f$  بر  $[a,b]$  نسبت به تابع صعودی  $\alpha$  کدام گزینه است؟

۱. مشتق پذیری  $f$  .  
۲. یکنوایی  $f$  .  
۳. پیوستگی  $f$  .  
۴. کرانداری  $f$  .

۱۱- در بازه  $[a,b]$ ، کدام گزینه با بقیه معادل نیست؟

۱.  $\int_a^b f d\alpha \neq \int_a^b f d\alpha$

۲.  $f$  در بعضی از نقاط  $[a,b]$  نا پیوسته است.

۳.  $\exists \varepsilon > 0 \forall P_\varepsilon \exists P(P_\varepsilon \subseteq P \wedge U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq \varepsilon)$

۴.  $f \notin R(\alpha)$

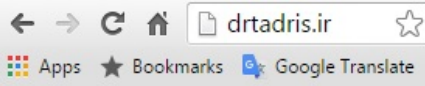
تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها، علوم کامپیوتر، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)  
(آمار ریاضی ۱۱۱۱۳۲۲)



۱۲- مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$  کدام گزینه است؟

۱.  $\log(2+\sqrt{2})$     ۲.  $\log(2-\sqrt{2})$     ۳.  $\log(1+\sqrt{2})$     ۴.  $\log(1-\sqrt{2})$

۱۳- اگر تابع  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و نا منفی و  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$  باشد. مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f^n(x) dx \right)^{1/n}$  کدام گزینه است؟

۱.  $M$     ۲. ۱    ۳. ۰    ۴.  $+\infty$

۱۴- اگر تابع  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و نا منفی و  $\int_a^b f(x) dx = 0$  باشد آنگاه  $f$  چه نوع تابعی است؟

۱.  $f$  تابع متناوب است.    ۲.  $f$  فقط تابع فرد است.  
۳.  $f$  فقط تابع زوج است.    ۴.  $f = 0$

۱۵- برای دنباله  $\{f_n\}$  با ضابطه  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$  بر  $R$  کدام گزینه درست نیست؟

۱. همگرایی یکنواخت است.    ۲.  $f'_n$  ها کراندارند.  
۳. نقطه وار همگراست.    ۴.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  موجود است.

۱۶- فرض کنید برای هر  $n$ ،  $f_n : [a, b] \rightarrow R$  و  $f_n \in R(\alpha)$  و  $f_n \rightarrow f$  ولی  $f \notin R(\alpha)$ . برای رسیدن به کدام گزینه در مورد دنباله  $\{f_n\}$ ، اطلاعات داده شده، کافی نیست؟

۱. همگرایی یکنواخت    ۲. کرانداری یکنواخت  
۳. همگرایی یکنواخت کوشی    ۴.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها، علوم کامپیوتر، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)  
(آمار ریاضی ۱۱۱۳۲۲)

۱۷- بر بازه  $[a, b]$  کدام گزینه همواره درست نیست؟

۱. حد یکنواخت دنباله ای از توابع پیوسته، پیوسته است.
۲. حد یکنواخت دنباله ای از توابع کراندار، کراندار است.
۳. حد یکنواخت دنباله ای از توابع مشتق پذیر، مشتق پذیر است.
۴. حد یکنواخت دنباله ای از توابع انتگرال پذیر، انتگرال پذیر است.

۱۸- کدام یک از سری های زیر بر  $R$  بطور یکنواخت همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh nx}{n^2} \quad .۱ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh nx}{n} \quad .۲ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{x+\frac{1}{2}}} \quad .۳ \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n \quad .۴$$

۱۹- فرض کنیم  $F$  خانواده ای از تابع های مختلط - مقدار بر مجموعه  $E$  در فضای متریک  $(M, d)$  باشد کدام گزینه، مفهوم همپیوستگی خانواده  $F$  می باشد؟

۱.  $\forall y \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x, f(x \in E, f \in F, d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$
۲.  $\forall \varepsilon > 0 \forall f \in F \exists \delta \forall x, y (x, y \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$
۳.  $\forall f \in F \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x, y (x, y \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$
۴.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x, y, f(x, y \in E, f \in F, d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

۲۰- فرض کنید  $X$  یک فضای متریک و  $A \subseteq C(X)$  یک جبر باشد. با توجه به قضیه استون - وایراشتراس، به کدامیک از خواص زیر برای اینکه  $\bar{A} = C(X)$  نیاز نداریم؟

۱. فشردگی  $X$
۲. خود الحاق بودن  $A$
۳. همپیوسته بودن  $A$
۴. صفر نشدن  $A$  بر  $X$

### سوالات تشریحی

۱- اگر فضای متریک  $M$  فشرده باشد ثابت کنید هر زیر مجموعه نامتناهی آن دارای یک نقطه انباشتگی در  $M$  است. ۱.۴۰ نمره

۲- اگر تابع  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته و  $E \subseteq X$  همبند باشد ثابت کنید  $f(E)$  همبند است. ۱.۴۰ نمره

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

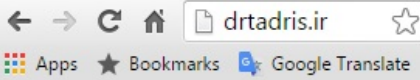
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها، علوم کامپیوتر، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)

(آمار ریاضی ۱۱۱۳۲۲)



۳- فرض کنید تابع  $f$  بر بازه  $(0,1]$  مشتق پذیر و بر این بازه  $|f'(x)| < 1$  باشد نشان دهید دنباله  $\{a_n\}$  با ضابطه  $a_n = f(\frac{1}{n})$  همگراست.

۴- اگر  $f \in R$  و تابعی مانند  $F$  موجود باشد بطوریکه  $F' = f$ . ثابت کنید  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

۵- اگر  $\{M_n\}$  دنباله ای از اعداد نامنفی بطوریکه  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  همگرا و  $\{f_n\}$  دنباله ای از توابع بطوریکه به ازای هر  $n$  و  $x$ ،  $|f_n(x)| \leq M_n$  باشد ثابت کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  بطور یکنواخت همگراست.