

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۲/۲۹	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳			

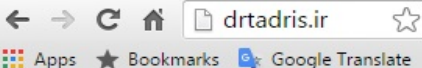
ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی $n > 6$ ، ثابت کنید:	۱/۷۵
	$n! > 3^n$	
۲	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است.	۱
۳	یک مدرسه حداقل چه تعداد دانش آموز باید داشته باشد تا دست کم ۱۳ دانش آموز در یک ماه از سال متولد شده باشند.	۰/۷۵
۴	اگر $a, b$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:	۱/۲۵
	$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	
۵	کدام یک از احکام زیر درست و کدام یک نادرست است؟ برای احکام نادرست مثال نقض بیاورید. الف) برای هر دو مجموعه دلخواه $A, B$ داریم: $A \times B = B \times A$ ب) اگر $n^2$ مضرب ۳ باشد آنگاه $n$ نیز مضرب ۳ است.	۰/۷۵
۶	مجموعه های $A = \{x   x \in Z, x^2 < 1\}$ و $B = \{\frac{1-x}{2}   x \in N, x \leq 2\}$ مفروضند: الف) مجموعه های $A, B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) اعضای مجموعه $A \Delta B$ را مشخص کنید.	۱/۲۵
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید اگر $A \cup B = A \cap B$ آنگاه $A = B$	۱
۸	اگر $A = (-\infty, -1]$ و $B = [-2, 3]$ باشد، نمودار حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ را رسم کنید.	۰/۷۵
۹	رابطه ی $R$ روی $Z$ به صورت ذیل تعریف شده است: $x R y \Leftrightarrow 4 x - y$ الف) نشان دهید که $R$ یک رابطه هم ارزی است. ب) رابطه ی $R$ مجموعه $Z$ را به چند کلاس هم ارزی افراز می کند؟	۱/۵
۱۰	اگر رابطه ی $R$ بر روی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به صورت زیر تعریف شده باشد: $x R y \Leftrightarrow -10 \leq x + 5y \leq 10$ رابطه ی $R$ را به صورت زوج های مرتب مشخص کنید.	۱

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۲/۲۹	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳			
<a href="http://drtadris.ir">drtadris.ir</a>			
<a href="#">Apps</a> <a href="#">Bookmarks</a> <a href="#">Google Translate</a>			

ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

ردیف	سؤالات	نمره
	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	
۱۱	در خانواده ای با سه فرزند: الف) فضای نمونه را بنویسید. ب) پیشامد A که در آن خانواده حداکثر یک فرزند دختر باشد. پ) پیشامد B که در آن خانواده فقط یک دختر باشد. ت) پیشامد $A' \cup B'$ را مشخص کنید.	۲
۱۲	از کیسه ای که شامل ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز و یک مهره سفید است، ۲ مهره با هم به تصادف بیرون می آوریم احتمال آنکه مهره ها هم رنگ باشند چقدر است؟	۱/۵
۱۳	تاس سالمی را ۸ بار پرتاب می کنیم، احتمال آنکه حداقل ۶ بار عددی اول ظاهر شود چقدر است؟	۰/۷۵
۱۴	اگر $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه ی تصادفی و $p(b) = \frac{1}{3}$ ، $p(\{b, d\}) = \frac{1}{4}$ و $p(\{b, c\}) = \frac{2}{3}$ باشد آنگاه $p(a)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۵	دو عدد حقیقی به تصادف بین $0$ و $2$ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه $ x - y  < 1$ را محاسبه کنید.	۲
۱۶	عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ انتخاب می کنیم، احتمال این که عدد انتخابی بر ۴ بخش پذیر باشد، اما بر ۷ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟	۱/۵
	« موفق باشید »	جمع نمره
		۲۰

ساعت شروع: ۸ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
 drtadris.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۷۵	$p(y): y! > 3^y \quad (۰/۲۵)$ $p(k): K! > 3^k \quad (۰/۲۵)$ $P(k+1): (k+1)! > 3^{k+1} \quad (۰/۲۵)$ <p>دو طرف فرض را در <math>K+1</math> ضرب می کنیم.</p> $K! (k+1) > 3^k (k+1) \quad (۰/۲۵)$ $(k+1)! > 3^k (k+1) \quad (۰/۲۵)$ <p>باید ثابت کنیم: <math>3^k (k+1) &gt; 3^{k+1}</math></p> $3^k (k+1) > 3^k \times 3 \rightarrow (k+1) > 3 \quad (۰/۲۵)$ <p>باتوجه به اینکه <math>k &gt; 6</math> است درستی عبارت فوق بدیهی است. (۰/۲۵)</p>	۱
۱	$\left. \begin{array}{l} x = 2n+1 \\ y = 2m+1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 =$ $2(2n^2 + 2n + 2m^2 + 2m + 1) = 2k \quad (۰/۲۵)$	۲
۰/۷۵	<p>m = تعداد کبوتر</p> <p>n = تعداد لانه = ۱۲</p> <p>طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از لانه ها <math>12+1=13</math> کبوتر است. (۰/۲۵)</p> <p>و همچنین <math>m = (12 \times 12) + 1 = 145</math> (۰/۲۵) بنابراین در این مدرسه حداقل ۱۴۵ دانش آموز وجود دارد (۰/۲۵)</p>	۳
	« ادامه در صفحه ی دوم »	

ساعت شروع: ۸ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳		

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۲۵	$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad (۰/۵)$ <p>با توجه به اینکه عبارت فوق همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی تمامی روابط برگشت پذیر می‌باشد. (۰/۲۵)</p>	۴
------	--	---

۰/۷۵	الف) نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵)	۵
------	---	---

۱/۲۵	<p>الف) <math>A = \{0\} \quad (۰/۲۵) \quad , \quad B = \left\{0, -\frac{1}{2}\right\} \quad (۰/۲۵)</math></p> <p>ب) <math>A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \left\{0, -\frac{1}{2}\right\} - \{0\} = \left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad (۰/۲۵)</math> (۰/۵)</p>	۶
------	---	---

۱	$\left. \begin{aligned} (A \cap B) \subseteq A \\ B \subseteq (A \cup B) \Rightarrow B \subseteq (A \cap B) \end{aligned} \right\} \Rightarrow B \subseteq A \quad (۰/۵)$ <p>به همین ترتیب ثابت میشود:</p> <p>(۰/۲۵) <math>A \subseteq B</math></p> <p>بنابراین:</p> <p>(۰/۲۵) <math>A = B</math></p>	۷
---	---	---

۰/۷۵	<p>رسم نمودار (۰/۷۵) نمره</p>	۸
------	-------------------------------	---

» ادامه در صفحه ی سوم «		
-------------------------	--	--

ساعت شروع: ۸ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
<a href="http://drtadris.ir">drtadris.ir</a>		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳
← → ↻ 🏠	★ Bookmarks	🗨 Google Translate

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۹	<p>الف)</p> $\forall x \in Z, x R x \Rightarrow \forall  x - x \Rightarrow \forall   0 \quad (0/25)$ <p>ب)</p> $x R y \Rightarrow \forall  x - y \Rightarrow \forall   -(y - x) \Rightarrow \forall   y - x \Rightarrow y R x$ <p>ج)</p> $\left. \begin{array}{l} x R y \Rightarrow \forall  x - y \Rightarrow x - y = \forall k \\ y R z \Rightarrow \forall  y - z \Rightarrow y - z = \forall k' \end{array} \right\} \Rightarrow x - z = \forall (k + k') = \forall k'' \Rightarrow x R z \quad (0/25)$ <p>رابطه متعدی است. (0/25)</p> <p>رابطه هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است. (0/25)</p> <p>رابطه مجموعه اعداد صحیح را به <math>\mathbb{Z}</math> کلاس هم ارزی افراز می کند. (0/25)</p>	۱/۵
۱۰	$R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$	۱
۱۱	$S = \{(d,d,d), (d,d,p), (d,p,d), (p,d,d), (p,p,p), (p,d,p), (d,p,p), (p,p,d)\} (0/5)$ $A = \{(p,p,p), (p,d,p), (d,p,p), (p,p,d)\} (0/5)$ $B = \{(p,d,p), (d,p,p), (p,p,d)\} (0/5)$ $A' \cup B' = \{(d,d,d), (d,d,p), (d,p,d), (p,d,d), (p,p,p)\} (0/5)$	۲
۱۲	$p(A) = \frac{C(4,2) + C(3,2)}{C(8,2)} = \frac{6 + 3}{28} = \frac{9}{28} \quad (0/25)$	۱/۵
۱۳	$p(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{\binom{n}{6} + \binom{n}{7} + \binom{n}{8}}{2^n} \quad (0/25)$	۰/۷۵
	ادامه در صفحه ی چهارم	

ساعت شروع: ۸ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳		

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۲۵	$p(\{b,c\}) = \frac{2}{3} \Rightarrow p(b) + p(c) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} + p(c) = \frac{2}{3} \Rightarrow p(c) = \frac{1}{3}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $p(\{b,d\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow p(b) + p(d) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} + p(d) = \frac{1}{2} \Rightarrow p(d) = \frac{1}{6}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1 \Rightarrow p(a) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \Rightarrow p(a) = \frac{1}{6}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱۴
------	--	----

۲	$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $A = \{(x, y) \mid -1 < x - y < 1\}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> <p style="text-align: right;">رسم شکل (۰/۵)</p> $p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{2}{4}$ <p style="text-align: center;">(۰/۵) (۰/۲۵)</p>	۱۵
---	---	----

۱/۵	$n(A \cap B) = \left[ \frac{10000}{28} \right] = 357$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $n(A) = \left[ \frac{10000}{4} \right] = 2500$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $P(A \cap B') = p(A) - p(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B') = \frac{2500}{10000} - \frac{357}{10000} = \frac{2143}{10000}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱۶
-----	---	----

۲۰	جمع نمره	« موفق باشید »
----	----------	----------------

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.